11 МНОГОШАГОВЫЕ РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

11.1 Метод Эйлера

Уравнение (77) заменяется разностным уравнением

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} - f(t_n, y_n) = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$
$$y_0 = u_0 \tag{78}$$

тогда решение уравнения находится по формулам: $y_{n+1} = y_n + \tau \cdot f(t_n, y_n), \quad n = 0,1,2,\ldots,$
$y_0 = u_0$

Введем понятие сходимости метода при $\tau \to 0$. Фиксируем точку t и построим последовательность сеток ω_τ таких, что $\tau \to 0$ и $t_n = n\tau = t$ (тогда необходимо $n \to \infty$). Говорят, что метод (78) сходится в точке t, если $|y_n - u(t_n)| \to 0$ при $\tau \to 0$ $t_n = t$. Метод сходится на отрезке $(0,T]$, если он сходится в каждой точке $t \in (0,T]$.

Говорят, что метод имеет p-ый порядок точности, если существует число p>0 такое, что $|y_n - u(t_n)| = O(\tau^p)$ при $\tau \to 0$.

Получим уравнение, которому удовлетворяет погрешность метода $z_n = y_n - u(t_n)$. Подставляя $y_n = z_n + u_n$ в (78), получим

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{\tau} = f(t_n, u_n + z_n) - \frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} \tag{79}$$

Правую часть уравнения (79) можно представить в виде суммы $\psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)}$, где

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} + f(t_n, u_n)$$
$$\psi_n^{(2)} = f(t_n, u_n + z_n) - f(t_n, u_n).$$

Функция $\psi_n^{(1)}$ называется невязкой или погрешностью аппроксимации разностного уравнения (79) на решении исходного уравнения (78). Видно, что невязка представляет собой результат подстановки точного решения $u = u(t)$ в левую часть разностного уравнения (79). Если бы приближенное решение y_n совпадало с точным $u(t_n)$, то невязка равнялась бы нулю. Говорят, что разностный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если $\psi_n^{(1)} \to 0$ при $\tau \to 0$. Разностный метод имеет p-ый порядок аппроксимации,

если $\psi_n^{(1)} = O(\tau^p)$. Оказывается при достаточно общих предположениях порядок точности разностного метода совпадает с порядком аппроксимации.

Порядок аппроксимации метода Эйлера (79) нетрудно найти, используя разложение по формуле Тейлора. Поскольку $\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} = u'(t_n) + O(\tau)$ то в силу уравнения (4)

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} + f(t_n,u_n) = -u'(t_n) - O(\tau) + f(t_n,u_n) = -u'(t_n) + f(t_n,u_n) - O(\tau) = O(\tau)$$

т.е. метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации. При выводе предполагалась ограниченность $u''(t)$.

Пример 1. Симметричная схема.

Уравнение (77) заменяется разностным уравнением

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} - \frac{1}{2}(f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},y_{n+1})) = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$
$$y_0 = u_0 \tag{80}$$

Данный метод является неявным, т.к. новое значение y_{n+1} определяется по найденному ранее y_n путем решения уравнения:

$$y_{n+1} - 0{,}5\tau \cdot f(t_{n+1},y_{n+1}) = F_n = y_n + 0{,}5\tau \cdot f(t_n,y_n)$$

Определим порядок аппроксимации метода, для чего разложим невязку по формуле Тейлора:

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} + \frac{1}{2}(f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1})) = -u_n' - \frac{\tau}{2}u_n'' + O(\tau^2) + \frac{1}{2}(u_n' + u_{n+1}') =$$

$$= -u_n' - \frac{\tau}{2}u_n'' + \frac{1}{2}(u_n' + u_n' + \tau \cdot u_n'' + O(\tau^2) = O(\tau^2)$$

Т.е. метод (80) имеет второй порядок аппроксимации.

11.2 Общая схема многошаговых разностных методов

Линейным m- шаговым разностным методом называется система разностных уравнений:

$$\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_m y_{n-m}}{\tau} = b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + \ldots + b_m f_{n-m}$$
$$n = m, m+1, \ldots, \tag{81}$$

где a_k, b_k - числовые коэффициенты, не зависящие от n, $k = 0,1,\ldots,m$, причем $a_0 \neq 0$.

Из формулы видно, что для начала расчета необходимо задать m начальных значений $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$. Значение y_0 определяется из начального

условия $y_0 = u_0$, а для нахождения $y_1,\ldots,y_{m-1}$ можно использовать какой-либо другой метод, например Рунге-Кутта (будет рассмотрен позднее).

Метод (8) называется явным, если $b_0 = 0$ и неявным, если $b_0 \neq 0$. В случае явного метода y_n выражается явным образом через предыдущие значения $y_{n-1}, y_{n-2},\ldots,y_{n-m}$. В случае неявного метода для нахождения y_n приходится решать нелинейное уравнение:

$$\frac{a_0}{\tau} y_n - b_0 f(t_n, y_n) = F[y_{n-1}, y_{n-2},\ldots, y_{n-m}] = \sum_{k=1}^{m} (b_k f_{n-k} - \frac{a_k}{\tau} y_{n-k})$$

Обычно это уравнение решают методом Ньютона, выбирая начальное приближение $y_n^{(0)}$ равным y_{n-1}.

Заметим, что коэффициенты уравнения (81) определены с точностью до множителя. Чтобы устранить этот произвол, будем считать, что выполнено условие

$$\sum_{k=0}^{m} b_k = 1 \quad . \tag{82}$$

В практике вычислений наибольшее распространение получили методы Адамса, которые представляют собой частный случай многошаговых методов (82)

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + \ldots + b_m f_{n-m}$$
$$n = m, m+1,\ldots, \tag{83}$$

Можно доказать, что порядок аппроксимации линейных m- шаговых разностных методов не может превосходить $2m$. Причем наивысший достижимый порядок аппроксимации для неявных m- шаговых методов равен $2m$, а для явных $2m-1$.

Для неявных m- шаговых методов Адамса (83) наивысший достижимый порядок аппроксимации равен $m+1$, а для явных - m.

Оказывается, что методы наивысшего порядка аппроксимации практически непригодны для расчетов, так как они неустойчивы, т.е. малые погрешности начальных условий приводят к большим погрешностям решений.

Приведем некоторые примеры многошаговых разностных методов для случая методов Адамса.

$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{3}{2} f_{n-1} - \frac{1}{2} f_{n-2}, \quad m = 2$ явный двухшаговый метод Адамса 2-го порядка аппроксимации.

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{12}(23 f_{n-1} - 16 f_{n-2} + 5 f_{n-3}), \quad m = 3$$

явный трехшаговый метод Адамса 3-го порядка аппроксимации.

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{24}(55 f_{n-1} - 59 f_{n-2} + 37 f_{n-3} - 9 f_{n-4}), \quad m = 4$$

явный четырехшаговый метод Адамса 4-го порядка аппроксимации.

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{720}(1901 f_{n-1} - 2774 f_{n-2} + 2616 f_{n-3} - 1274 f_{n-4} + 251 f_{n-5}), \quad m = 5$$

явный 5-шаговый метод Адамса 5-го порядка аппроксимации.

11.3 Методы Рунге-Кутта

Методы Рунге-Кутта отличаются от разностных методов тем, что в них допускается вычисление правых частей $f(t,u)$ не только в точках сетки, но и в некоторых промежуточных точках.

Пример 1.Метод Рунге-Кутта второго порядка точности

Предположим, что приближенное значение y_n решения исходной задачи в момент $t = t_n$ уже известно. Для нахождении $y_{n+1} = y(t_{n+1})$ поступим следующим образом. Сначала, используя схему Эйлера

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{0.5\tau} = f(t_n, y_n) \tag{84}$$

вычислим промежуточное значение $y_{n+1/2}$, а затем воспользуемся разностным уравнением

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n + 0.5\tau, y_{n+1/2}) \tag{85}$$

из которого явным образом найдем искомое значение y_{n+1}.

Если подставить $y_{n+1/2}$, вычисленное по формуле (84) в уравнение (85), то получим разностное уравнение

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau \cdot f_n) \tag{86}$$

Метод (86) имеет второй порядок погрешности аппроксимации, т.е. невязка $\psi_n^1 = O(\tau^2)$ и является явным. Реализация метода (86) в виде двух этапов (84), (85) называется методом предиктор-корректор (предсказывающе – исправляющим), поскольку на первом этапе (84) приближенное значение предсказывается с невысокой точностью $O(\tau)$, а на втором этапе (85) это предсказанное значение исправляется, так что результирующая погрешность

имеет второй порядок по τ. Тот же самый метод (86) можно реализовать несколько иначе. А именно, сначала вычислим последовательно функции

$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau \cdot k_1),$ а затем найдем y_{n+1} из уравнения $\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = k_2$.

Такая форма реализации метода (86) называется методом Рунге-Кутта. Поскольку требуется вычислить две промежуточные функции k_1 и k_2, данный метод относится к двухэтапным.

11.4 Общая формулировка методов Рунге-Кутта

Явный m-этапный метод Рунге-Кутта состоит в следующем. Пусть решение $y_n = y(t_n)$ уже известно. Задаются числовые коэффициенты $a_i, b_{ij}, \quad i = 2,3,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,m-1, \quad \sigma_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$ и последовательно вычисляются функции

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau \cdot k_1),$$
$$k_3 = f(t_n + a_3\tau, y_n + b_{31}\tau \cdot k_1 + b_{32}\tau \cdot k_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$k_m = f(t_n + a_m\tau, y_n + b_{m1}\tau \cdot k_1 + b_{m2}\tau \cdot k_2 + \ldots + b_{m,m-1}\tau \cdot k_{m-1}).$$

Затем из формулы

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i k_i \tag{87}$$

находится новое значение $y_{n+1} = y(t_{n+1})$.

Коэффициенты a_i, b_{ij}, σ_i выбираются из соображений точности. Например, чтобы уравнение (87) аппроксимировало исходное уравнение, необходимо потребовать $\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = 1$. Отметим, что методы Рунге-Кутта при $m > 5$ не используются.

Примеры методов Рунге-Кутта.

При $m = 1$ получаем метод Эйлера. При $m = 2$ получаем семейство методов

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau \cdot k_1),$$
$$y_{n+1} = y_n + \tau(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2) \tag{88}$$

Методы (88) имеют первый порядок аппроксимации, если $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$. Если же дополнительно потребовать $\sigma_2 a_2 = \sigma_2 b_{21} = 0.5$, то получим методы

второго порядка аппроксимации. Двухэтапных методов третьего порядка аппроксимации не существует.

Приведем примеры методов Рунге-Кутта более высокого порядка аппроксимации.

Метод третьего порядка:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau \cdot k_1),$$
$$k_3 = f(t_n + \tau, y_n - \tau \cdot k_1 + 2\tau \cdot k_2),$$
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3).$$

Метод третьего порядка:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{\tau}{3}, y_n + \frac{\tau k_1}{3}),$$
$$k_3 = f(t_n + \frac{2\tau}{3}, y_n + \frac{2\tau k_2}{3}),$$
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3).$$

Метод четвертого порядка:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau k_1}{2}),$$
$$k_3 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau k_2}{2}),$$
$$k_4 = f(t_n + \tau, y_n + \tau \cdot k_3),$$
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Метод четвертого порядка:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{\tau}{4}, y_n + \frac{\tau k_1}{4}),$$
$$k_3 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau k_2}{2}),$$
$$k_4 = f(t_n + \tau, y_n + \tau \cdot k_1 - 2\tau \cdot k_2 + 2\tau \cdot k_3),$$
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4).$$